Formelsammlung: Geraden

Datei Nr. 20001

Stand 17. November 2018

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Die **Gleichung einer** Geraden lautet:

wenn sie nicht parallel zur y-Achse ist $y = mx + n$ (1)

wenn sie parallel zur y-Achse ist. $x = c$ (2)

Es gibt Spezialfälle zu (1):

Eine Ursprungsgerade hat n = 0: $y = m \cdot x$

Die 1. Winkelhalbierende ist $y = x$

Die 2. Winkelhalbierende ist $y = -x$

Zum **Aufstellen einer Geradengleichung** muss man zuerst ihre Steigung berechnen:

Steigung einer Geraden durch 2 Punkte: $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ kurz: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (3)

wobei Δy die Differenz der y-Koordinaten
und Δx die Differenz der x-Koordinaten bedeutet.

Dann gibt es zwei Methoden, um die Geradengleichung zu finden:

1. **Die Punktsteigungsform** lautet: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ (4)

Hier setzt man für m die Steigung ein und
für x_1 und y_1 die Koordinaten eines Punktes der Geraden.

2. **Man kann auch m in die Gleichung (1)** einsetzen, dann muss man noch n.

bestimmen, indem man für x und y die Koordinaten eines Punktes der Geraden einsetzt.

Hinweis: Die Verwendung der Punktsteigungsform ist kürzer.

Senkrecht stehende (orthogonale) Geraden:

Für ihre Steigungen gilt die Beziehung $m_1 \cdot m_2 = -1$ bzw. $m_2 = -\frac{1}{m_1}$

In Worten: Die eine Steigung ist der negative Kehrwert der anderen.
(Das gilt nur, wenn die Geraden nicht parallel zu den Koordinatenachsen sind.)

Schnittwinkel zweier Geraden: $\tan \gamma_1 = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$

Diese Formel gilt natürlich nur, wenn keine Gerade parallel zur y-Achse ist.
Der Betrag sorgt dafür, dass der Tangenswert positiv wird. Dies ergibt einen Schnittwinkel unter 90^{O}. Wird in der Formel der Nenner Null. Sind die Geraden orthogonal.
Hat eine der Geraden die Steigung 0 (weil sie parallel zur x-Achse ist), dann ist $\tan \gamma = |m|$.

Länge einer Strecke: $e = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ kurz $e = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Mittelpunkt einer Strecke: $x_M = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und $y_M = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$

Schwerpunkt eines Dreiecks: $x_S = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$ und $y_S = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$

Abstand eines Punktes P von einer Geraden g:

1. Methode: Man fällt das Lot von P auf g.

Die Steigung des Lotes ist der negative Kehrwert von m_g.

Dann stellt man die Gleichung der Lotgerade durch P auf und schneidet sie mit g.

Der Schnittpunkt heißt Lotfußpunkt.

Der gesuchte Abstand ist dann

$$d(P,g) = \overline{PF} = \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2} = \ldots$$

2. Methode: Verwendung der Hesseschen Normalform.

Dazu bringt man die Geradengleichung auf die Form $ax + by + c = 0$

Dann dividiert man die Gleichung durch $\sqrt{a^2 + b^2}$:

HNF: $$\frac{ax + by + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

Dann setzt man den Punkt P in diese Gleichung ein.

Die linke Seite ergibt dann den gesuchten Abstand.

$$d(P,g) = \left| \frac{ax_P + by_P + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Beispiel: $y = -\frac{2}{3}x + 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = -2x + 15 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + 3y - 15 = 0 \;\; |: \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

HNF: $$\frac{2x + 3y - 15}{\sqrt{13}} = 0$$

Abstand des Punktes $P(-2\,|\,5)$ von g:

$$d(P,g) = \left| \frac{2 \cdot \boxed{-2} + 3 \cdot \boxed{5} - 15}{\sqrt{13}} \right| = \left| \frac{-4 + 15 - 15}{\sqrt{13}} \right| = \frac{4 \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = \frac{4}{13}\sqrt{13}$$

Ich habe zwischendurch mit $\sqrt{13}$ erweitert um den Nenner rational zu machen.